KVANTITATIVNE METODE U GRAĐEVINSKOM MENADŽMENTU

predavanja 2017/18

METODE OPTIMIZACIJE I NJIHOVA PRIMJENA U GRAĐEVINARSTVU

1. **Operaciona istraživanja**
2. **Linearno programiranje**
   1. **grafička metoda**
   2. **simpleks metoda** *(u narednom predavanju)*
   3. **transportni problemi-** *(u narednom predavanju)*

predavanja koncipirana uglavnom na osnovu knjige:
Ž. Praščević, N. Praščević- Operaciona istraživanja u građevinarstvu, Beograd 2009

P10

Operaciona istraživanja

- ***Operaciona istraživanja obuhvataju primjenu naučnih metoda za rješavanje kompleksnih problema koji nastaju u upravljanju velikim sistemima u privredi, poslovnim državnim, odbrambenim i drugim institucijama*** *(Def. Britanskog udruženja za operaciona istraživanja)*
- **cilj primjene** = povećanje efikasnosti poslovanja sistema
- Karakteristike operacionih istraživanja:
  - sistemski pristup (menadžmentu i poslovnom sistemu)
  - primjena u organizacionim (operativnim) sistemima (istraživanje operacija cijele organizacije)
  - primjena naučnih metoda i tehnika u izučavanju funkcionisanja sistema i priprema odluka
  - formulisanje modela i iznalaženje optimalnog ili zadovoljavajućeg rješenja
  - planiranje i upotreba eksperimentalnih operacija koje daju uvid u ponašanje stvarnih operacija
  - kompleksni radni timovi (poznavaoci operacionih istraživanja i eksperti za tehničke, tehnološke, ekonomske, pravne i dr. probleme)

Nastanak i razvoj operacionih istraživanja

- prvobitno rješavani problemi uspješnosti vojnih operacija
- na početku i tokom Prvog svjetskog rata u Velikoj Britaniji:
  - oformljen tim za rješavanje problema najefikasnijeg rasporeda protivavionske artiljerije
  - problem efikasnosti bombardovanja i zaštite brodskih konvoja
- na početku i tokom Drugog svjetskog rata
  - razvoj novih metoda taktičkih operacija (za otkrivanje neprijateljskih aviona radarom)
  - 1941. g. Bleket (fizičar- kasnije dobitnik Nobelove nagrade)- definisao cilj operacionih istraživanja: „da pomognu u nalaženju mogućnosti za poboljšanje ratnih operacija“
  - 1942. g. formirana u Američkoj mornarici Grupa za operaciona istraživanja, zatim u Kanadskom vazduhoplovstvu itd.
  - 1939. Kantorovič (RU- kasnije 1975- dobio Nobelovu nagradu za ekonomiju) prvi put formulisao neke značajne probleme proizvodnje kao zadatke linearnog programiranja i predložio metodu rješavajućih koeficijenata
  - 1949 Dancing (SAD) formulisao Simpleks metodu za rješavanje problema linearnog programiranja.
- nakon rata primjena u industriji

Faze rešavanja problema u operacionim istraživanjima

1. **formulacija problema**
   - opisuju se ciljevi istraživanja,
   - formulišu se hipoteze,
   - identifikuju se alternativne odluke,
   - sagledavaju se ograničenja, mogućnosti i zahtjevi sistema
2. **izrada matematičkog modela**-definisanje zadatka matematičkog programiranja=matematički program (nelinearni ili linearni)
   - definisanje funkcije cilja (cilj koji se želi postići funkcionisanjem sistema): $z=max(min)f(x1, x2, ...xn; \mu 1, \mu 2, ...\mu k)$ ili se ova funkcija može sastojati od više funkcija kriterijuma (višekriterijumska optimizacija)
   - uslovi ograničenja=matematičke relacije između promjenljivih xj koje zavise od tehnoloških zahtjeva, raspoloživih resursa, radnog prostora i sl.: $g_i(x1, x2, ...xn; \mu 1, \mu 2, ...\mu k)\leq 0$, $i=1,2...m$ ili jednačine $h_i(x1, x2, ...xn; \mu 1, \mu 2, ...\mu k)=0$, $i=1,2...r$
   - gdje su:
     - $x1, x2, ...xn$ - promjenljive odlučivanja (zavise od donijete odluke)
     - $\mu 1, \mu 2, ...\mu k$ - parametri stanja sistema- izražavaju neka svojstva sistema i predstavljaju ulazne podatke:
3. **određivanje rješenja modela**
   - određivanje optimalnog ili njemu bliskog rješenja= određivanje vrijednosti lpromjenljivih $x1, x2, ...xn$, koje zadovoljavaju uslove ograničenja, a za koje funkcija cilja ima max ili min (zavisno od njene prirode)
     - analitičkim putem za jednostavnije probleme (primjena matematičkih operacija: algebra, diferencijalni i integralni račun)
     - numeričkim postupcima (najćešće iterativnim postupkom od pretpostavljenog početnog rješenja, dok se ne dobije optimalno)
   - analiza osjetljivosti rješenja (odredi se optimalno rješenje za izabrane vrijednosti parametara μi, a zatim se utvđuje kako se ono mijenja sa promjenom parametara)
4. **provjera modela i ocjena rješenja**
   - koristeći postojeće podatke koji se odnose na ranije ponašanje sistema provjerava se da li je model dobro koncipiran
   - na osnovu posebnih probnih podataka predviđa se buduće ponašanje sistema
5. **primjena rješenja u praksi i kontrola njihovog izvršenja-** praćenje razlika između predloženog rješenja i stvarnih podataka. Uključen je tim koji je radio na rješavanju problema.

Metode operacionih istraživanja

1. **Grupe problema koje se rešavaju operacionim istraživanjima:**
   A. dobro matematički strukturirani problemi rješavaju se matematičkim metodama, ispunjavaju sljedeće:
      - može se formulisati matematički model,
      - model ima više dopustivih rješenja i sadrži funkcije kriterijuma na osnovu kojih se vrednuju rješenja,
      - postoji algoritam i matematička procedura za dobijanje rješenja
      - mogu se prikupiti sve informacije koje su neophodne za formulaciju modela

   B. slabo matematički strukturirani problemi (ne ispunjavaju gornje uslove), rješavaju se heurističkim i ekspertnim metodama
2. **Matematičke metode**-za formulaciju matematičkog modela i određivanje rješenja; karakteristike:
   – strogost u formulaciji i egzaktnost u nalaženju rješenja
   – za probleme čiji se uslovi ograničenja mogu precizno matematički definisati
   a) determinističke- vrijednosti svih parametara u modelu su determinističke veličine (određuju se sa potpunom vjerovatnoćom)
      - <u>linearno programiranje (smipleks metoda, grafička metoda, transportni problem)</u>
      - nelinearno programiranje
      - dinamičko programiranje,
      - cjelobrojno programiranje,
      - mrežno programiranje

   b) stohastičke- vrijednost bar jednog parametra se procjenjuje sa određenom vjerovatnoćom ili se ostvarenje uslova ograničenja procjenjuje sa vjerovatnoćom
      a) stohastičko programiranje,
      b) teorija slučajnih procesa,
      c) teorija masovnog opsluživanja (redova čekanja)
      d) teorija zaliha,
      e) metode simulacije (Monte Karlo metode)
      f) teorija pouzdanosti sistema i dr. (PERT)

   c) metode zasnovane na teoriji rasplinutih skupova

Metode operacionih istraživanja- nastavak

3. **Heurističke metode** se primjenjuju:
   - ako imamo formulisan matematički model, koji je vrlo komplikovan pa se ne može riješiti analitičkim ili numeričkm postupcima
   - ako ne možemo definisati matematički model, jer su promjenljive kvalitativne prirode
   - postupak uz podršku računara:
     - proučavanje problema
     - formulisanje ciljeva na osnovu intuicije, kreativnosti, znanja i iskustva,
     - određuju se osnovna pravila- heuristike na osnovu kojih se definiše matematički model i traže rješenja
     - provjera rješenja, i ponavljanje prethodnog koraka i provjere rješenja
4. **Ekspertne metode se primjenjuju:**
   - za matematički slabo strukturirane probleme
   - baziraju se na subjektivnim ocjenama mogućih rješenja od strane eksperata (Delfi metoda)

Linearno programiranje

- **najćešće primjenjivana metoda za tehničke, ekonomske, organizacione i dr. probleme**
- **u građevinarstvu se primjenjuje za**
  - organizaciju, ekonomiku i planiranje proizvodnje (izabrati proizvodni asortiman, kako bi se ostvario što veći profit)
  - određivanje sastava mješavina za proizvodnju betona, stabilizaciju tla i sl.
  - krojenje materijala (betonskog željeza, lima, građe) sa minimalnom količinom otpadaka
  - određivanje mehanizma loma i opterećenja loma konstruktivnih sistema u stanju granične ravnoteže....
- **Karakteristike:**
  - funkcija cilja linearna
  - uslovi ograničenja (nejednačine ili jednačine) linearni
- **Uslovi potrebni za primjenu linearnog programiranja**
  1. jasna formulacija cilja
  2. izabrati specifične uslove - ograničenja koja treba da su zasnovana na postojećim izvorima, planskim proporcijama i drugim faktorima koji određuju dozvoljena rešenja
  3. zadatak treba da dozvoli dobijanje niza rešenja i izbor optimalnog za date uslove
  4. model zadatka linearnog programiranja treba da sadrži isključivo linearne jednačine

Opšta formulacija zadaka linearnog programiranja

1. **funkcija cilja (linearna funkcija):**

$$\boldsymbol{max\ (ili\ min)\ z = f(x_1, x_2, \ldots x_n) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots . + c_n x_n} = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j$$

gdje su:

c_i - troškovi, realni brojevi, za i=1,2...,n

x_i - promjenljive koje treba odrediti, za i=1,2...,n

2. **sistem ograničenja** (ukupno *m* ograničenja)
   - *k* ograničenja sa znakom „≤“

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots . + a_{in}x_n = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \le b_i \quad \text{(i=1,2...k)}$$

   - *p* ograničenja sa znakom „≥“

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots . + a_{in}x_n = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \ge b_i \quad \text{(i=k+1, k+2,...k+p)}$$

   - *m-p-k* ograničenja sa znakom „=“

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots . + a_{in}x_n = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j = b_i \quad \text{(i=k+p+1, k+p+2,...,m)} ,$$

gdje su:

a_{ir} , a_{jr} , a_{kr} realni brojevi, za r=1,2...,n

b_i , b_j, b_k **pozitivni** realni brojevi

3. **uslov nenegativnosti**

$$x_i \ge 0$$

Matrični oblik zadatka linearnog programiranja

1. funkcija cilja: $max\ z = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}$
2. sistem ograničenja $\boldsymbol{Ax} \leq, =\geq \boldsymbol{b}$
3. uslov nenegativnosti $\boldsymbol{x} \geq 0$, $\boldsymbol{b} \geq 0$,

   gdje su vektori i matrica:

$\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$ vektor troškova resursa, $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ vektor zahtjeva (ograničenja)

$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ \cdots & \dots \ \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$, matrica koeficijenata

$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ vektor rješenja problema, ako zadovoljava sistem ograničenja, a ako zadovoljava i uslov nenegativnosti onda ovaj vektor predstavlja i dopustivo rješenje

Dopustivo i optimalno rješenje, interpretacija u n-dimenzionalnom prostoru

- Ako je:
  - $\boldsymbol{x}$ **-**rješenje problema (zadovoljava uslove ograničenja)
  - $\boldsymbol{x}^*$ dopustivo rješenje koje zadovoljava uslove ograničenja i uslove nenegativnosti
  - $\boldsymbol{cx}^*$ ima konačnu vrijednost, tako da:

$$\boldsymbol{cx}^* \leq (\geq)\boldsymbol{cx},$$

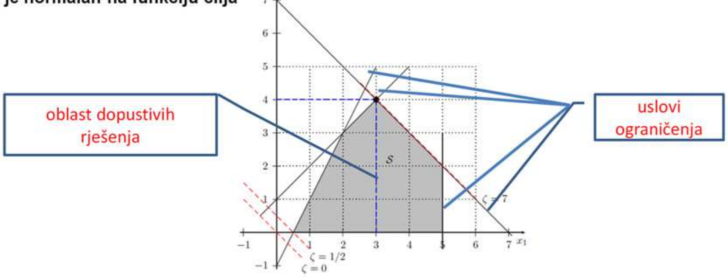
  tada je ***x**** - **optimalno rješenje** problema određivanja minimuma (maksimuma) funkcije cilja
- komponente vektora ***x*** predstavljaju koordinate neke tačke u n-dimenzionalnom vektorskom prostoru, a vektor ***x*** je njen vektor položaja (određuje koordinate tačke u n-dimenzionalnom prostoru)
- ograničenja sa znakom ≤ ili ≥ određuju po jedan poluprostor
  - ako je dvodimenzionalni prostor (u slučaju kad treba odrediti samo 2 promjenljive) onda ova ograničenja definišu poluravni
  - u slučaju trodimenzionalnog prostora (u slučaju kad treba odrediti 3 promjenljive), ova ograničenja predstavljaju poluprostore
- ograničenja sa znakom = određuju po jednu hiperravan
  - ako je dvodimenzionalni prostor onda ovakva ograničenja definišu prave u dvodimenzionalnom prostoru
  - u slučaju trodimenzionalnog prostora, ovakva ograničenja predstavljaju ravni u trodimenzionalnom prostoru
- Može se pokazati da je:

min z = - max(-z), pa se određivanje minimuma može tretirati, kao određivanje maksimuma funkcije **-z**

Grafički prikaz i grafičko rješavanje linearnog programiranja

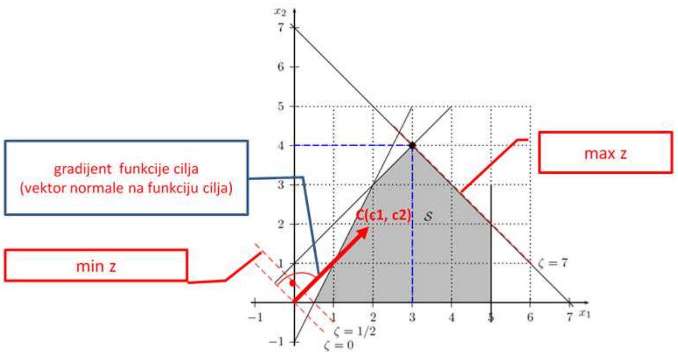
- primjenjiv za dvodimenzionalni (jednostavan za crtanje) i trodimenzionalni problem (komplikovanije za crtanje)
- Postupak rješavanja za dvodimenzionalni problem:
  - formulisanje matematičkog modela: razmotriti i formulisati uslove proizvodnje, ograničenja i funkciju cilja
  - rješavanje grafičkim putem – crtanjem u I kvadrantu pravouglog koordinatnog sistema
  - nacrtaju se prave definisane jednačinama koje se dobijaju iz uslova ograničenja zamjenom znakova nejednakosti znakom jednakosti

    $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots . + a_{in}x_n \leq (\geq) b_i$, postaju $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots . + a_{in}x_n = b_i$
  - određujemo oblast dopustivih rješenja kao presjek poluravni definisanih uslovima ograničenja (u prvom kvadrantu)
  - funkcija cilja je određena vektorom **c=**[c1, c2] **(gradijentom funkcije cilja), odnosno vektorom koji je normalan na funkciju cilja**



Grafički prikaz i grafičko rješavanje linearnog programiranja

- nacrta se prava $c_1x_1+c_2x_2=0$ i pomjera se paralelno samoj sebi duž vektora normale na funkciju cilja do najudaljenije tačke na konturi skupa dopustivih tačaka)
- određuje se ona tačka u oblasti dopustivih rješenja za koju funkcija cilja ima maksimalnu (ili minimalnu) vrijednost. Koordinate te tačke (očitaju se sa crteža) predstavljaju optimalno rješenje. U toj tački se može povući prava normalna na gradijent funkcije cilja, tako da se sve tačke oblasti dopustivih rješenja nalaze sa jedne strane te prave:
  - to je tačka maksimuma – ako je što dalja od koordinatnog početka
  - tačka minimuma –najbliža koordinatnom početku



Primjer 1: U jednom pogonu se proizvode dvije vrste proizvoda (P1 i P2) na mašinama (M1 i M2). Vrijeme obrade proizvoda P1 na mašini M1 iznosi 2 minuta, a vrijeme obrade proizvoda P1 na mašini M2 iznosi 7 minuta u jednom ciklusu. Proizvod P2 se obrađuje na mašini M1 5 minuta, a na mašini M2 2 minuta u jednom ciklusu. Tehnološki je uslovljeno trajanje ciklusa na mašini M1 do 10 minuta, a na mašini M2 do14 minuta. Odrediti plan proizvodnje koji će donijeti najveći profit, ako proizvod P1 donosi profit od 3 n.j /kom, a proizvod P2 7 n.j./kom.

Rješenje:

1. **funkcija cilja: maxz=$3x_1+7x_2$ gdje je x1 i x2 broj komada proizvoda P1, odnosno P2**
2. **uslovi ograničenja:**

	P1 (ai1)	P2(ai2)	bi
M1	2	5	10
M2	7	2	14

$$2x_1 + 5x_2 \leq 10$$
$$7x_1 + 2x_2 \leq 14$$

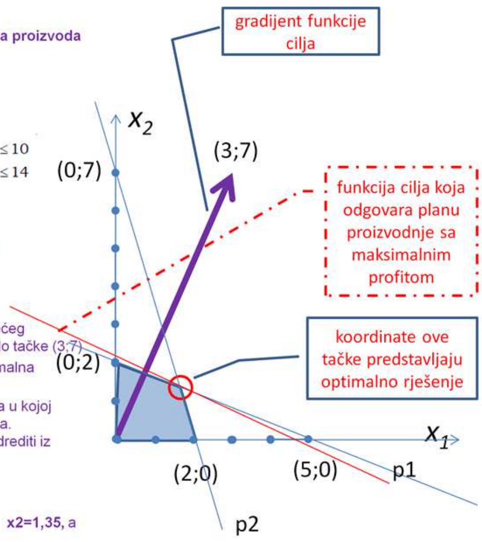
3. **uslovi nenegativnosti: x1, x2 ≥0**

- postupak:
  - uslovi ograničenja definišu prave koje treba nacrtati:
    - p1: $2x_1+5x_2=10$ (prolazi kroz tačke (5;0) i (0;2))
    - p2: $7x_1+2x_2=14$ (prolazi kroz tačke (2;0) i (0;7))
  - šrafira se oblast dopustivih rješenja
  - nacrta se gradijent funkcije cilja (pravac njenog najvećeg prirasta): povlači se prava od koordinatnog početka do tačke (3;7)
  - tačke po obodu šrafirane oblasti su kandidati za optimalna rješenja
  - tačka koja je najudaljenija od koordinatnog početka, a u kojoj funkcija cilja „tangira“ datu oblast je tačka maksimuma. Koordinate se mogu očitati sa crteža, ali se mogu i odrediti iz presjeka pravih:

    $2x_1+5x_2=10$ i $7x_1+2x_2=14$.

  - Odavde je optimalni plan proizvodnje: **x1=1,61 i x2=1,35,** a maksimalni profit koji se ostvaruje je

    max z=3*1,61+7*1,35=14,28



Literatura

- Ž. Praščević, N. Praščević: Operaciona istraživanja u građevinarstvu, Čugura print, Beograd, 2009,

- On line program za resavanje http://www.zweigmedia.com/utilities/lpg/index.html?lang=en